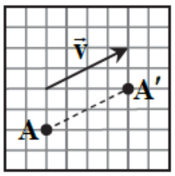
۱ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۱، فصل ۲)

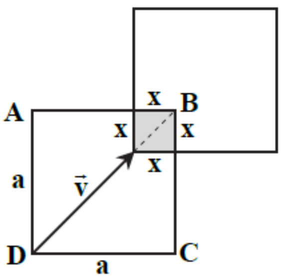
تبدیل‌های انتقال و تجانس در هر صورت شیب خط را حفظ می‌کنند و تصویر خط با خط اصلی همواره موازی است. در دوران ۱۸۰° هم شیب خط حفظ می‌شود، اما در بازتاب فقط وقتی این اتفاق می‌افتد که یا خط با محور بازتاب موازی باشد و یا بر محور بازتاب عمود باشد، پس در بازتاب محوری لزوماً شیب خط حفظ نمی‌شود.

۲ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: انتقال T تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$



طبق شکل روبه‌رو ناحیهٔ مشترک بین مربع $ABCD$ و انتقال یافته‌اش، مربعی به ضلع x است، داریم:



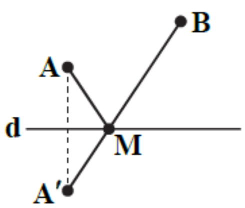
$$S = x^۲ = ۹ \Rightarrow x = ۳$$

مجموع اندازهٔ قطر این مربع کوچک و بردار $\vec{v}$ برابر با اندازهٔ قطر BD است:

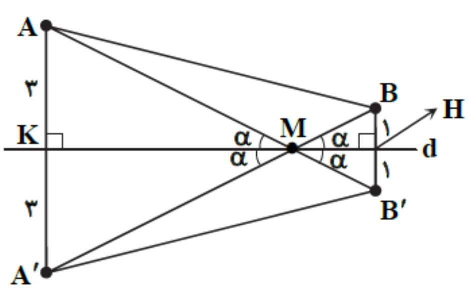
$$BD = |\vec{v}| + x\sqrt{۲} \xrightarrow{BD = a\sqrt{۲}} a\sqrt{۲} = |\vec{v}| + ۳\sqrt{۲} \Rightarrow |\vec{v}| = (a-۳)\sqrt{۲}$$

۳ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: در شکل روبه‌رو، برای به‌دست آوردن نقطهٔ M روی خط d به گونه‌ای که $MA + MB$ مینیمم گردد، ابتدا بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d یافته و آن را A' می‌نامیم، A' را به B وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ M قطع کند.



با توجه به زوایای α در شکل، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $MA'K$ و MHB' به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند:



$$\frac{MK}{MH} = \frac{A'K}{B'H} = ۳ \Rightarrow \frac{MK}{MH} = ۳ \Rightarrow MK = ۳MH$$

$$MK + MH = ۸ \Rightarrow ۳MH + MH = ۸ \Rightarrow ۴MH = ۸$$

$$MH = ۲ \ , \ MK = ۶$$

$$S_{\overset{\triangle}{MA'B'}} = S_{KHB'A'} - S_{\overset{\triangle}{MHB'}} - S_{\overset{\triangle}{MKA'}}$$

$$= \frac{۱}{۲}(۱+۳)\times ۸ - \frac{۱}{۲}\times ۱\times ۲ - \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۶ = ۱۶ - ۱ - ۹ = ۶$$

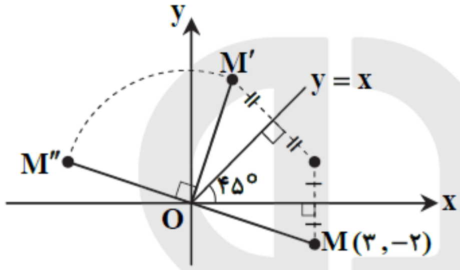
۴ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، دورانی است به مرکز محل تلاقی دو خط و زاویهٔ دو برابر زاویهٔ بین دو خط.

پس طبق نکتهٔ فوق، M' دوران یافتهٔ M است در دوران به مرکز O و زاویهٔ $2\times 45^\circ = 90^\circ$.

وقتی M' را به مرکز مبدأ مختصات 90° دوران می‌دهیم، مطابق شکل، M'' دوران یافتهٔ M با زاویهٔ 180° خواهد بود، پس داریم:

$$M(3,-2) \Rightarrow M''(-3,2)$$



۵ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطهٔ M' را مجانس نقطهٔ M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطهٔ O، M و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM' = |k| \cdot OM$

پ) ۱) اگر k مثبت باشد، M' روی نیم‌خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند. مثال:

$k = 2$, $OM' = 2OM$

$k = \frac{1}{2}$, $OM' = \frac{1}{2}OM$

۲) اگر k منفی باشد، نقطهٔ O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد. مثال:

$K = -2$, $OM' = 2OM$

طبق فرض سؤال و شکل روبه‌رو داریم:

$$AO = OB \ , \ NC = NB$$

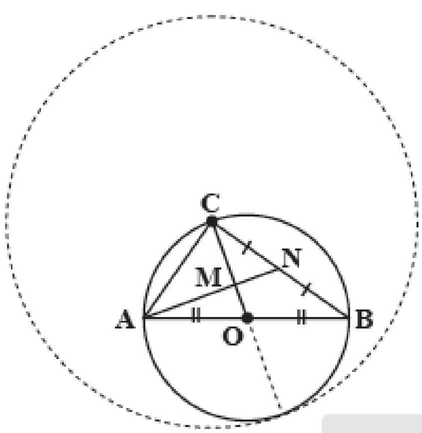
پس M محل تلاقی دو میانه در مثلث ABC و مرکز ثقل این مثلث است، داریم:

$$\frac{AM}{MN} = 2$$

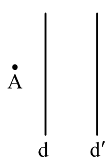
پس نسبت تجانس به مرکز M که N را بر A تصویر می‌کند، برابر -2 است و اگر دایرهٔ مفروض را با همین نسبت تجانس و مرکز تجانس M تصویر کنیم، نقطهٔ O بر نقطهٔ C تصویر می‌شود:

$$\frac{CM}{MO} = 2$$

و مطابق شکل باید دایره‌ای به مرکز C و شعاع دو برابر CO رسم کنیم. این دایره با دایرهٔ اولیه مماس داخل است.



در شکل رسم‌شده، فاصلهٔ بین دو خط موازی d و d'، برابر با ۱۰ است. اگر A' تصویر A در بازتاب نسبت به d و A'' تصویر A' در بازتاب نسبت به d' باشد، آن‌گاه فاصلهٔ A'' از d برابر با ۱۸ است. اگر O نقطه‌ای روی d'، به فاصلهٔ ۱۳ از A باشد، فاصلهٔ A'' از OA کدام است؟



۱) $\frac{۵۰}{۷}$

۲) $\frac{۲۵}{۳}$

۳) $\frac{۱۰۰}{۱۳}$

۴) $\frac{۲۰}{۳}$

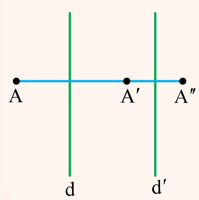
پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره یکی از تمرین‌های مهم کتاب درسی هندسهٔ (۲) در فصل تبدیل‌ها، در مورد ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی است که نتیجهٔ آن را در درس‌نامهٔ این سؤال آورده‌ایم.

خودت حل کنی بهتره مساحت مثلث OAA'' را با استفاده از دو تا از ارتفاع‌های آن به دست آورده و با هم برابر قرار دهید.

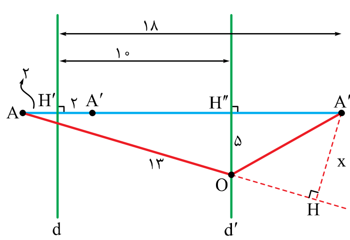
درس‌نامه

دو خط موازی d و d' و نقطهٔ A را در شکل مقابل ببینید. در این شکل اول نقطهٔ A را نسبت به d بازتاب داده‌ایم تا به نقطهٔ A' و بعد A' را نسبت به d' بازتاب داده‌ایم تا به نقطهٔ A'' برسیم. در چنین حالتی طول AA'' دو برابر فاصلهٔ بین دو خط موازی است.



پاسخ تشریحی **گام اول (تکمیل شکل مسئله و مشخص کردن خواستهٔ سؤال):**

نقاط A' , A'' و O را همان‌طور که سؤال می‌خواهد به شکل مسئله اضافه می‌کنیم. سؤال فاصلهٔ A'' از AO، یعنی $A''H = x$ را می‌خواهد.



گام دوم (محاسبهٔ AH'): در شکل مسئله دقیقاً همان اتفاقی افتاده که در درس‌نامه گفتیم، پس می‌توانیم بگوییم طول AA'' دو برابر فاصلهٔ دو خط موازی است؛ یعنی:

$$AA'' = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$$

حالا طول $A''H' = ۱۸$ را از AA'' کم می‌کنیم تا طول AH' پیدا شود:

$$AH' = AA'' - A''H' = ۲۰ - ۱۸ = ۲$$

گام سوم (محاسبهٔ طول OH''): خوب به مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH'' نگاه کنید. در این مثلث $AH''=۱۰+۲=۱۲$ و $OA=۱۳$ است؛ پس طول ضلع OH'' طبق قضیهٔ فیثاغورس برابر می‌شود با:

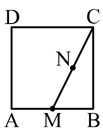
$$AH''^{۲}+OH''^{۲}=OA^{۲} \Rightarrow ۱۲^{۲}+OH''^{۲}=۱۳^{۲} \Rightarrow OH''^{۲}=۱۶۹-۱۴۴=۲۵ \Rightarrow OH''=۵$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حالا برای محاسبهٔ خواستهٔ سؤال یعنی، $A''H=x$، یک بار مساحت مثلث رنگی را برحسب ارتفاع $OH''=۵$ و بار دیگر برحسب ارتفاع $A''H=x$ به دست می‌آوریم و مساوی هم می‌گذاریم:

$$\cancel{\frac{۱}{۲}}\times OH''\times AA''=\cancel{\frac{۱}{۲}}\times A''H\times AO \Rightarrow ۵\times ۲۰=x\times ۱۳ \Rightarrow x=\frac{۱۰۰}{۱۳}$$

تست و پاسخ ۷

مطابق شکل، نقطهٔ M وسط AB و N وسط CM است. اگر مربع ABCD را با بردار BN انتقال دهیم، چند درصد از سطح شکل حاصل، درون مربع ABCD قرار می‌گیرد؟



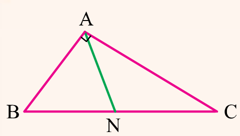
۱) ۱۲/۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره برای رسم انتقال تبدیل یک چندضلعی، باید تصویر همهٔ رأس‌های آن را تحت آن تبدیل به دست آورید.

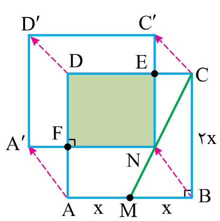
درس‌نامه ۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. مثلاً در شکل مقابل، اگر AN میانه باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{AN=\frac{BC}{۲}}$$



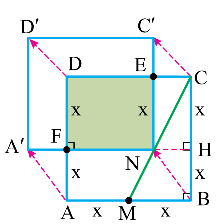
۲) هر چهارضلعی، اگر دو ضلع مقابل به هم داشته باشد که هم موازی باشند و هم مساوی، آن چهارضلعی حتماً متوازی‌الاضلاع است.

پاسخ تشریحی **گام اول (رسم شکل و تحلیل آن)**: شکل مسئله به صورت روبه‌رو است. همان‌طور که می‌بینید ضلع‌های مربع جدید، ضلع‌های مربع اولیه را در نقاط E و F قطع می‌کنند. چون M وسط ضلع AB است؛ پس می‌توانیم فرض کنیم $AM=MB=x$ باشد، در این صورت طول ضلع مربع می‌شود $۲x$.



برای این‌که بفهمیم چند درصد از مساحت مربع جدید درون مربع قبلی است، به طول و عرض مستطیل رنگی نیاز داریم تا بتوانیم مساحتش را حساب کنیم. با محاسبهٔ NE شروع می‌کنیم:

گام دوم (محاسبهٔ طول NE): در مثلث MBC از N به BC عمود می‌کنیم تا BC را در H قطع کند. حالا در این مثلث پاره‌خط NH را داریم که MC را نصف کرده است؛ پس طبق قضیهٔ تالس می‌توانیم بگوییم BC را هم نصف می‌کند، یعنی $HC=HB=x$. در آخر به مستطیل NECH نگاه کنید. واضح است که $NE=HC=x$ و در نتیجه $DF=FA=x$ است.



گام سوم (محاسبهٔ طول FN): برای محاسبهٔ طول FN کافی است طول NH را از FH کم کنیم. طبق قضیهٔ تالس در مثلث CMB، $NH=\frac{x}{۲}$ است؛ پس داریم:

$$FN=۲x-\frac{x}{۲}=\frac{۳x}{۲}$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): سؤال می‌خواهد ببینید چند درصد از مساحت مربع جدید داخل مربع قبلی قرار می‌گیرد. برای محاسبهٔ چنین چیزی نسبت $\frac{S_{FDEN}}{S_{ABCD}}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_{FDEN}}{S_{ABCD}}=\frac{FN\times NE}{AB^{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}x\times x}{(۲x)^{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}\cancel{x^{۲}}}{۴\cancel{x^{۲}}}=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱۲۵}{۱۲۵}=\frac{۳۷۵}{۱۰۰۰}=\frac{۳۷/۵}{۱۰۰}$$ یا ٪۳۷/۵

تست و پاسخ ۸

نقاط $A(۲۴,۰)$ و $B(۱۸,۰)$ را به ترتیب در دوران‌های به مرکز O (مبدأ مختصات) و زوایای ۱۵° و ۱۰۵° تصویر می‌کنیم تا نقاط A' و B' به دست آید. فاصلهٔ O از خط $A'B'$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۸ ۳) ۱۴/۴ ۴) ۱۵

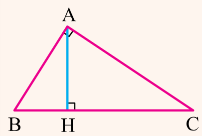
پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره سؤالی ترکیبی از «دوران» و «روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه». در هندسهٔ پایهٔ کنکور باید، همیشه آمادگی مواجهه با سؤال‌های ترکیبی را داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره مثلث $A'OB'$ قائم‌الزاویه است.

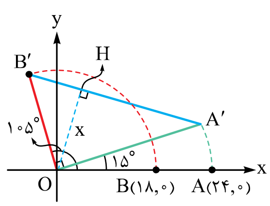
درس‌نامه

در هر مثلث قائم‌الزاویه مثل ABC در شکل مقابل، بین ارتفاع وارد بر وتر (AH) و طول اضلاع مثلث (AB، AC و BC) این رابطه برقرار است:



$$\boxed{AB \times AC = AH \times BC}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (رسم شکل و مشخص‌کردن استراتژی حل):** اول شکل مسئله را می‌کشیم.



سؤال فاصلهٔ O را از پاره‌خط $A'B'$، یعنی $OH = x$ را می‌خواهد. این پاره‌خط حکم ارتفاع مثلث $OB'A'$ را دارد. بیایید نوع این مثلث را مشخص کنیم.

خوب به زاویهٔ $B'\hat{O}A'$ از این مثلث نگاه کنید؛ با توجه به این‌که $B\hat{O}B' = ۱۰۵^{\circ}$ و $A\hat{O}A' = ۱۵^{\circ}$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$B'\hat{O}A' = ۱۰۵^{\circ} - ۱۵^{\circ} = ۹۰^{\circ}$$

پس مثلث $A'OB'$ قائم‌الزاویه و OH ارتفاع وارد بر وتر است، پس برای محاسبهٔ $OH = x$ از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'OB'$ استفاده می‌کنیم.

گام دوم (محاسبهٔ طول اضلاع مثلث $A'OB'$): OA و OA' شعاع‌های دوران ۱۵° هستند؛ پس: $OA' = OA = ۲۴$. همین‌طور OB و OB' هم شعاع‌های دوران ۱۰۵° هستند؛ در نتیجه: $OB = OB' = ۱۸$. حالا می‌توانیم طول ضلع $A'B'$ را هم به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'OB'$ حساب کنیم:

$$A'B'^{۲} = OA'^{۲} + OB'^{۲} \Rightarrow A'B'^{۲} = ۲۴^{۲} + ۱۸^{۲} = ۶^{۲}(۴^{۲} + ۳^{۲}) \Rightarrow A'B'^{۲} = ۶^{۲} \times ۲۵ \Rightarrow A'B' = ۶ \times ۵ = ۳۰$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حالا که طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را داریم می‌توانیم به کمک رابطه‌ای که در درس‌نامه گفتیم، طول $AH = x$ را به دست بیاوریم:

$$OH \times A'B' = OA' \times OB' \Rightarrow x \times ۳۰ = ۲۴ \times ۱۸ \Rightarrow x = \frac{\overset{۸}{\cancel{۲۴}} \times ۱۸}{\underset{۱۰}{\cancel{۳۰}}} = \frac{۱۴۴}{۱۰} = ۱۴/۴$$

تست و پاسخ ۹

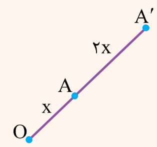
در تجانس به مرکز $W(۱,۲)$ و نسبت k، مبدأ مختصات روی نقطهٔ $O'(h, h+۳)$ تصویر می‌شود. حاصل $\frac{h}{k}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) $-۱/۵$ ۳) ۱ ۴) -۱

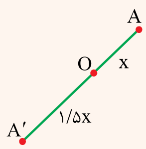
پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره O' روی خط گذرنده از $W(۱,۲)$ و $O(۰,۰)$ واقع است.

درس‌نامه تصویر نقطهٔ A در تجانس به مرکز O و نسبت k (که در آن $k \neq ۰$) نقطه‌ای مانند A' است، به طوری که A، O و A' روی یک خط راست قرار بگیرند و $OA' = |k|.OA$. اگر $k > ۰$، A و A' در یک طرف O و اگر $k < ۰$، A و A' در طرفین نقطهٔ O قرار می‌گیرند.



A' تبدیل‌یافتهٔ A در تجانس به مرکز O و نسبت $k = ۳$ است.



A' تبدیل‌یافتهٔ A در تجانس به مرکز O و نسبت $k = -۱/۵$ است.

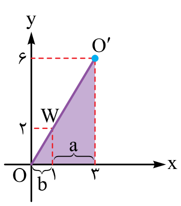
از این تعریف، نتیجهٔ مهم زیر حاصل می‌شود:

«در یک تجانس به مرکز O خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرشان وصل می‌کنند، از مرکز تجانس می‌گذرند.»

پاسخ تشریحی **گام اول (نوشتن معادلهٔ خط WO و محاسبهٔ h):** معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $W(۱,۲)$ و $O(۰,۰)$ به صورت $y = ۲x$ است، از طرفی اگر O' تصویر O در تجانس به مرکز W باشد، آن‌گاه O'، W و O روی یک خط واقع‌اند، یعنی نقطهٔ $O'(h, h+۳)$ بر خط $WO: y = ۲x$ واقع است؛ پس:

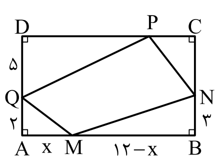
$$y_{O'} = ۲x_{O'} \Rightarrow h + ۳ = ۲h \Rightarrow h = ۳ \Rightarrow O'(۳,۶)$$

گام دوم (محاسبهٔ نسبت تجانس و خواستهٔ سؤال): O' تصویر O در تجانس به مرکز W است و در شکل داریم می‌بینیم که O و O' در طرفین مرکز تجانس هستند، یعنی نسبت تجانس منفی است و داریم $k = \frac{-WO'}{WO}$، حاصل $\frac{WO'}{WO}$ با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث رنگی برابر با $۲ = \frac{۳-۱}{۱} = \frac{a}{b}$ است؛ پس $k = -۲$ و داریم: $\frac{h}{k} = \frac{۳}{-۲} = -۱/۵$



تست و پاسخ ۱۰

مطابق شکل، M و P نقاط متغیری بر اضلاع AB و CD از مستطیل $ABCD$ هستند. کم‌ترین محیط چهارضلعی $MNPQ$ کدام است؟



۱) ۳۰

۲) ۲۸

۳) ۲۵

۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره «مسئلهٔ هرون برای طول کوتاه‌ترین مسیر»، در نظام جدید به کتاب درسی افزوده شده و کنکورهای نظام جدید نشان داده که این موضوع، یکی از موضوعات مهم هندسهٔ پایهٔ کنکور است.

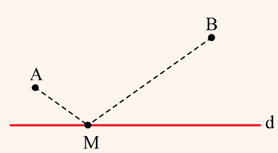
خودت حل کنی بهتره کم‌ترین مقدار ممکن برای $QP + NP$ را با کم‌ترین مقدار ممکن برای $QM + NM$ جمع کنید.

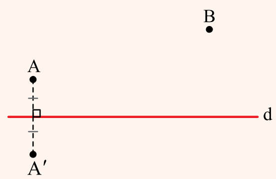
درس‌نامه

۱) **مسئلهٔ هرون:** در این مسئله مطابق شکل روبه‌رو، دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d قرار دارند. می‌خواهیم نقطه‌ای مثل M را روی خط d پیدا کنیم به طوری که مسیر AMB (همون $AM + MB$) کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد. برای پیداکردن نقطهٔ M کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

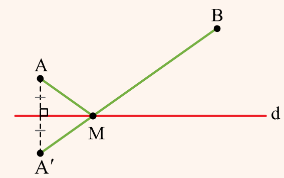
الف) نقطهٔ A را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم (شکل ۱)

ب) A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطهٔ M قطع کند. M همان نقطه‌ای است که به دنبالش هستیم.



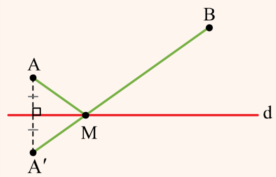


(شکل ۱)

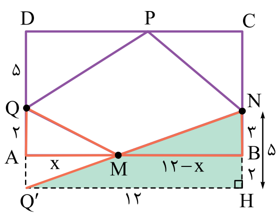


(شکل ۲)

۲) در مسئلهٔ هرون (شکل مقابل) همیشه رابطهٔ $AM + MB = A'B$ برقرار است؛ پس در این مسئله به جای محاسبهٔ « $AM + MB$ » می‌توانیم « $A'B$ » را حساب کنیم.



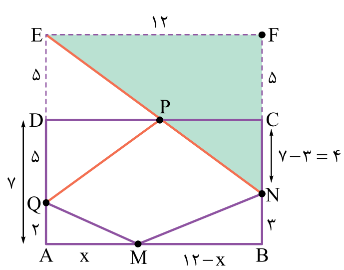
پاسخ تشریحی **گام اول (حداقل‌کردن $QM + MN$)**: برای این‌که محیط چهارضلعی MNPQ، یعنی $QM + MN + NP + PQ$ حداقل شود، اول باید $QM + MN$ حداقل شود.



حالا خوب به مسیر QMN و پاره‌خط AB نگاه کنید. Q و N در یک طرف خط AB هستند و می‌خواهیم M را در AB طوری مشخص کنیم که $QM + MN$ حداقل شود؛ پس با مسئله هرون طرفیم. طبق درس‌نامه Q را نسبت به AB بازتاب می‌دهیم تا به Q' برسیم، بعد Q' را به N وصل می‌کنیم تا AB را در M قطع کند. طبق مورد (۲) درس‌نامه در مسئلهٔ هرون می‌توانیم به جای $QM + MN$، طول $Q'N$ را حساب کنیم. برای این کار از Q' عمودی بر امتداد NB می‌کشیم تا آن در نقطهٔ H قطع کند. حالا به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ سبزرنگ $Q'N$ را به دست می‌آوریم:

$$NQ'^{۲} = Q'H^{۲} + NH^{۲} \Rightarrow NQ'^{۲} = ۱۲^{۲} + ۵^{۲} = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹ \Rightarrow NQ' = ۱۳ \Rightarrow MQ + MN = NQ' = ۱۳ \quad (*)$$

گام دوم (حداقل‌کردن $PQ + PN$): حالا نوبت حداقل‌کردن $PQ + PN$ است. به پاره‌خط DC و نقاط Q و N که در یک طرف آن قرار دارند، توجه کنید؛ همان‌طوری که می‌بینید باز هم با مسئلهٔ هرون طرفیم؛ پس Q را نسبت به DC بازتاب می‌دهیم تا به نقطهٔ E برسیم؛ بعد E را به N وصل می‌کنیم تا DC را در P قطع کند. طبق مورد (۲) درس‌نامه به جای محاسبهٔ $PQ + PN$ می‌توانیم EN را حساب کنیم. برای این کار عمود EF را بر امتداد NC می‌کشیم تا بتوانیم به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ EFN، طول EN را به دست بیاوریم:



$$EN^{۲} = NF^{۲} + EF^{۲} \xrightarrow[NF=۵+۴=۹]{EF=۱۲} EN^{۲} = ۱۲^{۲} + ۹^{۲} = ۳^{۲}\underbrace{(۳^{۲} + ۴^{۲})}_{۵^{۲}} \Rightarrow EN = ۳ \times ۵ = ۱۵ \Rightarrow PQ + PN = EN = ۱۵ \quad (**)$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): سؤال حداقل محیط چهارضلعی MNPQ را می‌خواهد که برای به دست آوردنش کافی است طرفین تساوی‌های (*) و (**) را با هم جمع کنیم:

$$\underbrace{MQ + MN + PQ + PN}_{\text{حداقل محیط چهار ضلعی MNPQ}} = ۱۳ + ۱۵ = ۲۸$$

۱۱ ارزش گزارهٔ $\sim(p\vee\sim p)\Rightarrow p\wedge q$ با ارزش گزاره در کدام گزینه برابر است؟

۱) $(\sim p\wedge p)\Leftrightarrow p\wedge q$
۲) $(p\vee q)\vee(p\Rightarrow q)$
۳) $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
۴) گزینهٔ ۱ و ۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکاتی در مورد "گزاره‌های شرطی و دوشرطی"

نکته۱:

$$p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$$

نکته۲:

گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$ زمانی دارای ارزش درست است که p و q دارای ارزش یکسان باشند.

نکته۳:

در گزارهٔ $p\Rightarrow q$ زمانی که ارزش گزارهٔ p نادرست باشد، گزارهٔ $p\Rightarrow q$ به انتفای مقدم همواره درست است.

پاسخ تشریحی:

ابتدا در فرض مساله، ارزش مقدم را بررسی می‌کنیم: $p\vee\sim p\equiv T\Rightarrow\sim(p\vee\sim p)\equiv F$

حال می‌دانیم ارزش گزاره‌های شرطی در حالی که مقدم نادرست است به انتفای مقدم درست است: $F\Rightarrow(p\wedge q)\equiv T$

پس این گزاره یک گزارهٔ همواره درست است.

حال به بررسی گزاره‌های داده شده در گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی گزینه‌ها:

۱) در گزاره‌های دوشرطی، ارزش گزاره زمانی درست است که هر دو طرف دارای ارزش یکسان باشند.
ارزش گزاره $(\sim p\wedge p)$ نادرست است، ولی ارزش $p\wedge q$ نامعلوم است، بنابراین گزارهٔ $p\wedge q\Leftrightarrow(\sim p\wedge p)$ همواره درست نیست.

۲) می‌دانیم: $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$، پس داریم:

$$(p\vee q)\vee(p\Rightarrow q)\equiv(p\vee q)\vee(\sim p\vee q)\equiv(p\vee\sim p)\vee(q\vee q)\equiv T\vee q\equiv T$$

پس این گزاره همواره درست است.

۳) جدول ارزش گزاره‌ها را در این گزینه ببینیم:

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۱۲ مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ را به چند طریق می‌توان به یک زیرمجموعهٔ سه عضوی، یک زیرمجموعهٔ دو عضوی و یک زیرمجموعهٔ یک عضوی فاقد عضو f افراز نمود؟

۱) ۱۰
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۵۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

$$\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{}}\binom{5}{2}\binom{3}{3}=50$$

انتخاب یک عضو برای زیرمجموعهٔ یک عضوی
از بین ۵ عضو (f نباید انتخاب شود)

۱۳ نقیض گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2-2x+1}=0 \Rightarrow \left|x^3-1\right|=0$ کدام است؟

۱) $\exists x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2-2x+1}=0 \wedge \left|x^3-1\right|\neq 0$
۲) $\exists x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2-2x+1}=0 \wedge \left|x^3-1\right|= 0$
۳) $\exists x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2-2x+1}=0 \vee \left|x^3-1\right|\neq 0$
۴) $\exists x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2-2x+1}\neq 0 \wedge \left|x^3-1\right|\neq 0$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکتهٔ اول رو که قبلاً گفتیم، اما ۲ نکتهٔ بعدیش در مورد "نقیض گزاره‌های سوری" هست.

نکته۱: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

نکته۲: $\sim\left(\forall x: P(x)\right) \equiv \exists x: \sim P(x)$

نکته۳: $\sim\left(\exists x: P(x)\right) \equiv \forall x: \sim P(x)$

پاسخ تشریحی:

نقیض گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{R}: P(x)$ برابر $\exists x\in\mathbb{R}: \sim P(x)$ است، پس لازم است ابتدا نقیض گزاره‌های $\left(\sqrt{x^2-2x+1}=0 \Rightarrow \left|x^3-1\right|=0\right)$ را به دست آوریم. از طرفی داریم: $(p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q)$، پس داریم:

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2-2x+1}=0 \Rightarrow \left|x^3-1\right|=0\right) \equiv \left(\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2-2x+1}\neq 0 \vee \left|x^3-1\right|=0\right)$$

حال نقیض این گزاره را می‌نویسیم:

$$\left(\exists x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2-2x+1}=0 \wedge \left|x^3-1\right|\neq 0\right)$$

۱۴ اگر $A\subseteq B$ باشد، مجموعهٔ $\left[(A'\cap B')\cup(A\cap B')\right]'\cap(A-B)$ کدام است؟

۱) $\varnothing$
۲) U
۳) $A\cap B'$
۴) $A\cup B'$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

به ایستگاه "نکاتی در باب جبر مجموعه‌ها" خوش آمدید.

نکته۱: $(A-B)=A\cap B'$

نکته۲: قانون دمورگان

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

نکته۳: توزیع پذیری اجتماع نسبت به اشتراک

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$$

پاسخ تشریحی:

$$\left[(A'\cap B')\cup(A\cap B')\right]'\cap(A-B)=(A'\cap B')'\cap(A\cap B')'\cap(A\cap B')=(A\cup B)\cap(A'\cup B)\cap(A\cap B')$$
$$=((A\cap A')\cup B)\cap(A\cap B')=(\varnothing\cup B)\cap(A\cap B')=B\cap(A\cap B')=(B\cap B')\cap A=\varnothing\cap A=\varnothing$$

۱۵ اگر $M=\{1,2,3,4,5\}$ و $N=\{4,5,6\}$ باشد، $M^2-N\times M$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۴
۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

و این هم از "خاصیت توزیع پذیری ضرب دکارتی نسبت به تفریق" در مجموعه‌ها:

در هر ضرب دکارتی داریم:

$$A^2-A\times B=A\times A-A\times B=A\times(A-B)$$

$$M^2 - N\times M = M\times M - N\times M = (M-N)\times M = \{1,2,3\}\times\{1,2,3,4,5\}$$

$$n\big((M-N)\times M\big) = n(M-N)\times n(M) = 3\times 5 = 15$$

۱۶ در درون هر یک از دو جعبهٔ A و B به ترتیب ۴ و ۱۰ مهره وجود دارد که از مهره‌های جعبهٔ A دقیقاً ۱ مهره و از مهره‌های جعبهٔ B دقیقاً ۳ مهره قرمز هستند. در هر یک از حالات زیر، مهره‌ها را از کدام جعبه انتخاب کنیم تا احتمال دسترسی به حداقل یک مهرهٔ قرمز بیشتر باشد؟

I: مجاز باشیم دقیقاً دو مهره از درون جعبه برداریم. **II**: مجاز باشیم دقیقاً سه مهره از درون جعبه برداریم.

۱) $I:A\ ,\ II:A$ ۲) $I:A\ ,\ II:B$ ۳) $I:B\ ,\ II:A$ ۴) $I:B\ ,\ II:B$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۷)

پاسخ تشریحی:

I)

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = ? = \dfrac{\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] P(B) = ? = 1 - \dfrac{\binom{3}{0}\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{8}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow I:B$$

II)

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = ? = \dfrac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \dfrac{3}{4} \\[2ex] P(B) = ? = 1 - \dfrac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \dfrac{7}{24} = \dfrac{17}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow II:A$$

۱۷

جعبه‌ای شامل ۴ مهره با شماره‌های ۴,۳,۲,۱ در اختیار است. A، B، C هر کدام یک مهره با جایگذاری از درون آن بیرون می‌آورند. اگر بدانیم عدد A از هر دو عدد B و C بزرگ‌تر است، احتمال آن که اعداد B و C مساوی باشند، کدام است؟ Telegram : AzmonVIP

۱) $\frac{۴۹}{۱۴۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

و حالا "احتمال شرطی" وارد می‌شود:

اگر A و B دو پیشامد باشند، داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

روش اول:

پیشامد X را آن تعریف می‌کنیم که عدد A از هر دو عدد B و C بزرگ‌تر باشد و پیشامد Y را آن تعریف می‌کنیم که اعداد B و C مساوی باشند، که در این صورت هدف سوال یافتن مقدار $P(Y|X)$ است.

$$P(X)=P\Big(\big(A=۴ \text{ و } (B,C) \text{ یکی از اعداد } \{۱,۲,۳\}\big) \text{ یا } \big(A=۳ \text{ و } (B,C) \text{ یکی از اعداد } \{۱,۲\}\big) \text{ یا } \big(A=۲ \text{ و } B=C=۱\big)\Big)=\frac{۱}{۴}.\frac{۹}{۱۶}+\frac{۱}{۴}.\frac{۴}{۱۶}+\frac{۱}{۴}.\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۴}{۶۴}$$

$$P(X\cap Y)=\frac{۳}{۶۴}+\frac{۲}{۶۴}+\frac{۱}{۶۴}=\frac{۶}{۶۴}$$

$$\Rightarrow ?=P(Y|X)=\frac{P(Y\cap X)}{P(X)}=\frac{\frac{۶}{۶۴}}{\frac{۱۴}{۶۴}}=\frac{۳}{۷}$$

روش دوم:

با توجه به صورت سؤال فضای نمونه‌ای را به گونه‌ای کاهش می‌دهیم که عدد A از B و C بزرگ‌تر باشد:

$$S=\{(۴,۱,۱),(۴,۱,۲),(۴,۱,۳),(۴,۲,۱),(۴,۲,۲),(۴,۲,۳),(۴,۳,۱),(۴,۳,۲),(۴,۳,۳),(۳,۱,۱),(۳,۱,۲),(۳,۲,۱),(۳,۲,۲),(۲,۱,۱)\}$$

از ۱۴ عضو موجود، ۶ عضو مشخص شده‌اند که مطلوب مسئله ما می‌باشند. پس پاسخ برابر است با: $\frac{۶}{۱۴}=\frac{۳}{۷}$

گروه آموزشی ماز

۱۸

در مسابقات دوی ۸۰۰ متر بازی‌های آسیایی، ۴ نفر از شرق آسیا و ۴ نفر از غرب آسیا به فینال راه پیدا کرده‌اند. در بازی فینال، احتمال اول شدن همهٔ دوندگان از شرق آسیا با هم برابر بوده و دو برابر احتمال اول شدن هر یک از نفرات غرب آسیاست. در لحظهٔ شروع مسابقات «این چون اون» از شرق آسیا خطا کرده و از دور مسابقات خارج می‌شود و پس از شلیک تپانچه ۷ نفر به مسابقه ادامه می‌دهند. احتمال آن که «تاپاشی گوشه» از شرق آسیا اول شود کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

این شما و این هم "احتمال غیر هم‌شانس":

اگر در سؤالی، حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{S_۱,S_۲,...S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، باید از احتمال غیرهم‌شانس استفاده کنیم.

پاسخ تشریحی

با حذف «این چون اون»، $P(S)$ که برابر ۱ است، بین ۷ نفر α، β و γ (از شرق) و a، b، c، d (از غرب) توزیع می‌شود:

$$p(a)=p(b)=p(c)=p(d)=t$$

$$p(\alpha)=p(\beta)=p(\gamma)=2t$$

$$P(S)=1\Rightarrow t+t+t+t+2t+2t+2t=1\Rightarrow t=\frac{1}{10}$$

$$P(\text{تاپاشی‌گوشه})=P(\alpha)=2t=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

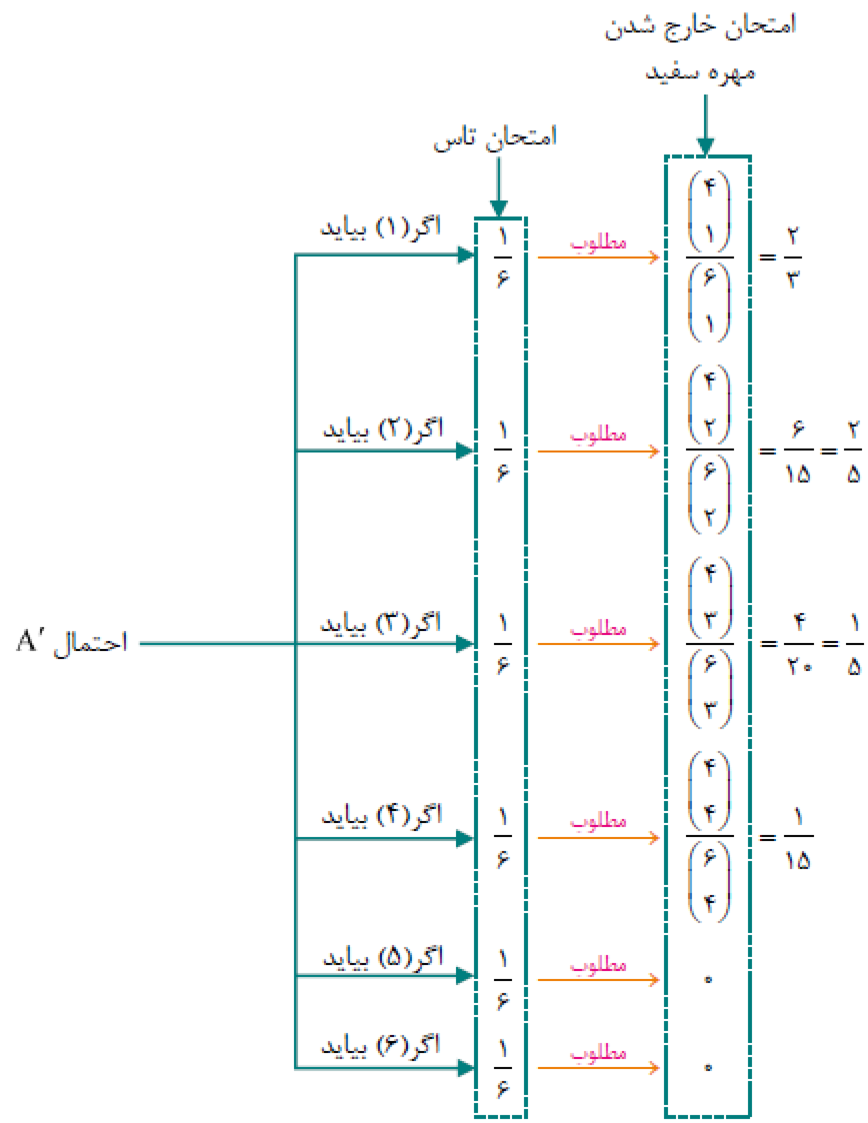
۱۹ **در جعبه‌ای، ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ قرمز است. تاسی را پرتاب کرده و به اندازهٔ عدد رو شده، از جعبه مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که در مهره‌های بیرون آمده مهرهٔ قرمزی موجود باشد، کدام است؟**

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{7}{9}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی

اگر پیشامد موردنظر را A بنامیم، آن‌گاه احتمال A' (سفید بودن مهره‌های منتخب) از نمودار درختی زیر به‌دست می‌آید:



حالا برای به دست آوردن احتمال A'، ستون‌های نمودار درختی را در هم ضرب می‌کنیم و ردیف‌های آن را با هم جمع می‌کنیم:

$$P(A')=\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{6}\times 0\right)+\left(\frac{1}{6}\times 0\right)$$

$$\Rightarrow\ P(A')=\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{90}=\frac{10+6+3+1}{90}=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$$

در نتیجه $P(A)$ برابر است با $1-P(A')=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

۲۰ **جعبه‌های A، B، C به ترتیب شامل ۴،۳،۲ مهره‌اند که دقیقاً یکی از مهره‌های هر جعبه سیاه است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب و مهره‌ای از درون آن انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مهرهٔ بیرون آمده سیاه است، احتمال آن که از جعبهٔ C بوده باشد کدام است؟**

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{3}{13}$ ۴) $\frac{2}{7}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

قانونی بسیار بسیار مهم و تست خیز، به نام "قانون بیز"

فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')}$$

پاسخ تشریحی:

$$?=P(C|\text{سیاه})=\frac{P(C).P(\text{سیاه}|C)}{P(\text{سیاه})}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{13}{36}}=\frac{3}{13}$$

۲۱ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

فقط مورد «ب» درست است.

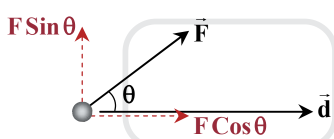
موارد «الف»، «پ» و «ت» نادرست هستند، چون کار برایند نیروهای وارد بر جسم برابر است با تغییرات انرژی جنبشی آن.

مورد «ث» نادرست است؛ چون کار نیروی عمودی سطح صفر است و کار نیروی سطح (برایند F_N و f_k) منفی است.

۲۲ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

کار نیروی $\vec{F}$ در جابه‌جایی $\vec{d}$ از رابطهٔ $W = Fd\cos\theta$ حساب می‌شود که θ زاویهٔ بین $\vec{F}$ و $\vec{d}$ است.

با توجه به شکل روبه‌رو می‌توانیم بگوییم:



W = جابه‌جایی × (مؤلفهٔ نیرو در امتداد جابه‌جایی)

در این مسئله $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (-۸m)\vec{j}$، پس مؤلفهٔ نیرو در امتداد جابه‌جایی همان مؤلفهٔ عمودی نیروی $\vec{F}$ است:

$$W = -۸ \times (-۲۰) = ۱۶۰J$$

۲۳ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

نیروی $F_۱$ جسم را به‌طرف راست می‌کشد و نیروی $F_۲$ مخالف حرکت آن است. پس کار $F_۱$ مثبت و کار $F_۲$ منفی می‌شود. با توجه به اینکه نیروی وزن و نیروی عمودی تکیه‌گاه بر مسیر عمود هستند، روی جسم کار انجام نمی‌دهند و کار کل انجام‌شده روی جسم به‌صورت زیر حساب می‌شود.

$$W_t = W_۱ + W_۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵}W_۱ = W_۱ + W_۲ \Rightarrow W_۲ = -\frac{۲}{۵}W_۱ \Rightarrow W_۱ = -\frac{۵}{۲}W_۲$$

$$\Rightarrow F_۱ d\cos ۳۷^\circ = -\frac{۵}{۲}F_۲ d\cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow ۰/۸F_۱ = \frac{۵}{۲}\times F_۲ \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow F_۱ = \frac{۵}{۴}\times\frac{۱۰}{۸}F_۲ = \frac{۲۵}{۱۶}F_۲$$

۲۴ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

مسیر حرکت بدون اصطکاک است. در این صورت با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی بین دو نقطهٔ شروع حرکت و در حالت فشردگی فنر، می‌توان نوشت:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow U_۱ + K_۱ = U_۲ + K_۲ \Rightarrow mgh + \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = U_{\text{فنر}} + \frac{۱}{۲}mv_۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲\times۱۰\times۱/۵ + \frac{۱}{۲}\times۲\times۱۶ = ۱۰ + \frac{۱}{۲}\times۲\times v_۲^۲$$

$$\Rightarrow ۳۰ + ۱۶ = ۱۰ + v_۲^۲ \Rightarrow v_۲^۲ = ۳۶ \Rightarrow v_۲ = ۶\frac{m}{s}$$

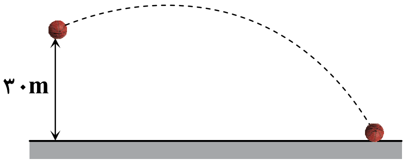
۲۵ – پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

نیروهایی که روی توپ کار انجام می‌دهند، وزن توپ (mg) و مقاومت هوا (f) هستند.

$W_{mg} = -mg\Delta h = -m \times ۱۰ \times (-۳۰) = ۳۰۰m$: کار نیروی وزن به مسیر حرکت بستگی ندارد

با استفاده از قضیهٔ کار – انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\Delta K = W_t = W_{mg} + W_f$$



$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) = W_{mg} + W_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}m(۳۰^۲ - ۲۰^۲) = ۳۰۰m + W_f$$

$$\Rightarrow ۲۵۰m = ۳۰۰m + W_f \Rightarrow W_f = -۵۰m$$

در این صورت نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{W_{mg}}{W_f} = \frac{۳۰۰m}{-۵۰m} = -۶$$

۲۶ – پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

در طول مسیر دو نیرو بر گلوله وارد می‌شود؛ یکی نیروی وزن و دیگری نیروی عمودی سطح (از اصطکاک و مقاومت هوا هم که صرف‌نظر شده است.)

نیروی وزن تنها نیرویی است که روی جسم کار انجام می‌دهد؛ زیرا نیروی عمودی سطح، همواره بر مسیر عمود است و کار آن صفر می‌شود.

پس برای هر بخشی از مسیر که در نظر بگیریم باید بگوییم:

$$\Delta K = W_t = W_{mg}$$

بین B و C: $K_C - K_B = -mg\Delta h_{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}m(v_C^۲ - v_B^۲) = -mg\Delta h_{BC} \Rightarrow ۶^۲ - v_B^۲ = -۲۰ \times (۱۱-۳)$

$$\Rightarrow v_B^۲ = ۱۹۶ \Rightarrow v_B = ۱۴\frac{m}{s}$$

بین C و D: $K_D - K_C = -mg\Delta h_{CD} \Rightarrow \frac{۱}{۲}m(v_D^۲ - v_C^۲) = -mg\Delta h_{CD}$

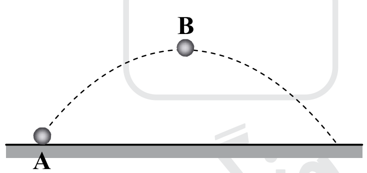
$$\Rightarrow v_D^۲ - ۶^۲ = -۲۰(۰-۱۱) \Rightarrow v_D^۲ = ۲۲۰ + ۳۶ = ۲۵۶ \Rightarrow v_D = ۱۶\frac{m}{s}$$

$$v_D - v_B = ۱۶ - ۱۴ = ۲\frac{m}{s}$$

تذکر: این سؤال را با استفاده از قانون پایستگی انرژی مکانیکی نیز می‌توان حل کرد.

۲۷ – پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

وقتی گلوله به‌صورت مایل پرتاب می‌شود، در بالاترین نقطه تندی آن صفر نمی‌شود، بلکه کمترین تندی در بالاترین نقطه اتفاق می‌افتد.

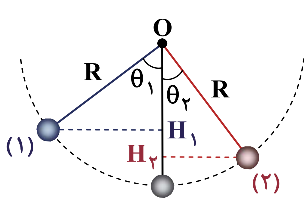


چشم‌پوشی از مقاومت هوا : $E_A = E_B$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = \frac{۱}{۲}m(\frac{v_۰}{۵})^۲ + mgh_B \Rightarrow \frac{۲۴}{۲۵}v_۰^۲ = ۲gh_B \Rightarrow h_B = \frac{۱۲v_۰^۲}{۲۵g}$$

۲۸ – پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

با توجه به شکلِ مسیر، ابتدا اختلاف‌ارتفاع ایجادشده را حساب می‌کنیم:



$$\begin{cases} OH_۱ = R\cos\theta_۱ \\ OH_۲ = R\cos\theta_۲ \end{cases} \Rightarrow H_۱H_۲ = R(\cos\theta_۲ - \cos\theta_۱)$$

$$\Rightarrow H_۱H_۲ = ۱/۵(۰/۸ - ۰/۶) = ۰/۳\,m$$

حالا می‌توان نوشت:

$$E_۲ - E_۱ = (mgh_۲ + \frac{۱}{۲}mv_۲^۲) - (mgh_۱ + \frac{۱}{۲}mv_۱^۲) = mg(h_۲ - h_۱) + \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

$$= ۰/۸ \times ۱۰ \times (-۰/۳) + \frac{۱}{۲} \times ۰/۸ \times (۹-۴) = -۲/۴ + ۲ = -۰/۴\,J$$

توجه کنید که وقتی گلوله از نقطهٔ (۱) به نقطهٔ (۲) می‌رود، Δh منفی است. ($\Delta h = -H_۱H_۲ = -۰/۳\,m$)

$E_۲ - E_۱ = -۰/۴J \Rightarrow$ ۰/۴ ژول انرژی مکانیکی تلف شده است.

۲۹ – پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ فیزیک ۱ (فصل ۳)

با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ کار نیروی وزن که فقط به تغییرات ارتفاع بستگی دارد، می‌توان نوشت:

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -۰/۵ \times ۱۰ \times (۵-۹) = ۲۰J$$

۳۰ – پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۳)

با استفاده از قضیهٔ کار – انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \underbrace{W_F}_{\text{کار نیروی } F} + \underbrace{W_{f_k}}_{\text{کار اصطکاک}} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow (Fd\cos\theta) + (-f_k \cdot d) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

در این صورت بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جسم برابر است با:

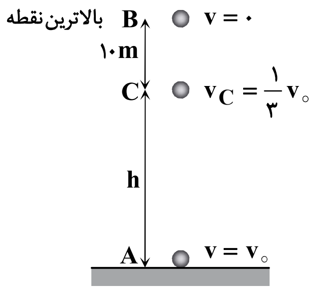
$$50\times 10\times 0/8 - 10f_k = \frac{1}{2}\times 10\times(8^2 - 0) \Rightarrow 400 - 10f_k = 320 \Rightarrow f_k = 8\,N$$

۳۱ – پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

با توجه به اینکه از مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌کنیم، انرژی مکانیکی گلوله ثابت است.

$$E_A = E_B = E_C$$

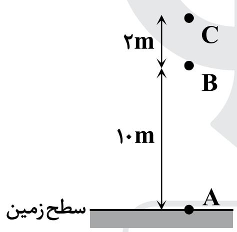
نقطهٔ A را به‌عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر می‌گیریم:



$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_\circ^2 = mg(h+10) \Rightarrow v_\circ^2 = 2g(h+10) \\ \frac{1}{2}m(\frac{v_\circ}{3})^2 + mgh = mg(h+10) \Rightarrow \frac{v_\circ^2}{9} = 2g\times 10 \Rightarrow v_\circ^2 = 200\times 9 \end{cases} \Rightarrow 2g(h+10) = 200\times 9 \Rightarrow h+10 = 90\,m$$

۳۲ – پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۳)

در هنگام بالا رفتن، نیروهایی که روی وزنه کار انجام داده‌اند عبارتند از نیروی وزن، نیروی مقاومت هوا (f_D) و F. در نقطهٔ A تندی جسم صفر بوده و در نقطهٔ C نیز برابر صفر است. پس $K_C = K_A = 0$.



$$\Delta K = W_t = W_{mg} + W_F + W_{f_D} \Rightarrow 0 = -20\times 12 + 30\times 10 - 12f_D \Rightarrow f_D = 5\,N$$

در بازگشت از نقطهٔ C تا نقطهٔ A دو نیروی وزن و مقاومت هوا روی جسم کار انجام می‌دهند.

$$K_A - K_C = W_{mg} + W_{f_D}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = +20\times 12 - 5\times 12 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 2v^2 = 180 \Rightarrow v^2 = 180 \Rightarrow v = 6\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$$

۳۳ – پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

ورودی این دستگاه انرژی الکتریکی مصرفی و خروجی مفید آن انرژی مکانیکی است که به آب داده می‌شود.

$$\text{بازده} = \frac{\text{انرژی مکانیکی داده‌شده به آب}}{\text{انرژی الکتریکی مصرفی}} = \frac{mg\Delta h + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}{\text{انرژی الکتریکی }(E)} \Rightarrow E = \frac{900(10\times 10 + \frac{1}{2}\times 4^2)}{0/72} = \frac{900\times 108}{0/72}$$

$$P = \frac{E}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{\frac{900\times 108}{0/72}}{60} = \frac{900\times 108}{60\times 0/72} = \frac{3\times 3\times 1000}{2\times 2} = 2/25\times 10^3\,W \Rightarrow 2/25\,kW$$

۳۴ – پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

از قضیهٔ کار انرژی جنبشی یک بار برای مسیر رفت و یک بار برای مسیر برگشت استفاده می‌کنیم. ضمناً توجه می‌کنیم که کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت و برگشت مساوی و همواره منفی است.

کار نیروی وزن در قسمت افقی صفر است و در قسمت شیب‌دار در مسیر رفت و برگشت هم‌اندازه است (mgh)؛ اما هنگام بالا رفتن منفی و هنگام پایین آمدن مثبت است. ضمناً انرژی جنبشی در نقطهٔ C برابر صفر است و در نقطهٔ A در ابتدا $\frac{1}{2}mv_1^2$ و در انتها $\frac{1}{2}mv_2^2$ است.

$$\begin{cases} \text{در مسیر رفت}: K_C - K_A = W_{mg} + W_{f_k} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mgh + W_{f_k} \\ \text{در مسیر برگشت}: K_A - K_C = W_{mg} + W_{f_k} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = +mgh + W_{f_k} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفریق دو رابطه}} \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) = 2mgh \Rightarrow \frac{1}{2}(20^2 + 10^2) = 2\times 10\times h \Rightarrow h = \frac{500}{40} = 12/5\,m$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{BC} \Rightarrow BC = \frac{12/5}{0/5} = 25\,m$$

۲۵ تندی حرکت متحرکی به جرم $4kg$ با آهنگ $3\frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد. اگر انرژی جنبشی متحرک در لحظهٔ $t=4s$، $306J$ بیشتر از انرژی جنبشی آن در لحظهٔ $t=1s$ باشد، در کدام لحظه انرژی جنبشی آن برابر $512J$ می‌شود؟

۱) $t=7s$ ۲) $t=4s$ ۳) $t=6s$ ۴) $t=5s$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

انرژی جنبشی

۱) انرژی جنبشی یک جسم مطابق رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

۲) مطابق رابطهٔ فوق، هر ژول معادل با $\frac{\text{مترمربع} \times \text{کیلوگرم}}{\text{مربع ثانیه}}$ است.

۳) برای مقایسهٔ انرژی جنبشی دو جسم می‌توان نوشت:

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \frac{K_2}{K_1}=\frac{m_2}{m_1}\times(\frac{v_2}{v_1})^2$$

مثال:

تندی حرکت جسم A، $8\frac{m}{s}$ بیشتر از تندی حرکت جسم B است. اگر جرم دو جسم برابر باشد و انرژی جنبشی A، ۲۱ درصد بیشتر از B باشد، تندی حرکت B چند متر بر ثانیه است؟

اگر تندی حرکت B برابر v باشد، تندی حرکت A برابر $v+8\frac{m}{s}$ است. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_A}{m_B}\times(\frac{v_A}{v_B})^2 \rightarrow \frac{121}{100}=1\times(\frac{v+8}{v})^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}\frac{11}{10}=\frac{v+8}{v}\rightarrow v=80\frac{m}{s}$$

پاسخ تشریحی:

تندی حرکت در هر ثانیه $۳\frac{m}{s}$ افزایش می یابد، بنابراین در مدت ۳ ثانیه، تندی به اندازهٔ $۹\frac{m}{s}$ زیاد می‌شود، پس اگر تندی در لحظهٔ $t=۱s$ برابر v باشد، در لحظهٔ $t=۴s$ برابر $v+۹\frac{m}{s}$ می‌شود. برای محاسبهٔ اختلاف انرژی جنبشی در این دو لحظه می‌توان نوشت:

$$K_۴-K_۱=۳۰۶J\rightarrow\frac{۱}{۲}m(v_۴^۲-v_۱^۲)=۳۰۶$$

$$\rightarrow\frac{۱}{۲}\times۴\times\left((v+۹)^۲-v^۲\right)=۳۰۶$$

$$\rightarrow۲\times(۱۸v+۸۱)=۳۰۶$$

$$\rightarrow۱۸v=۷۲\rightarrow v=۴\frac{m}{s}$$

برای آن‌که انرژی جنبشی به $۵۱۲J$ برسد، داریم:

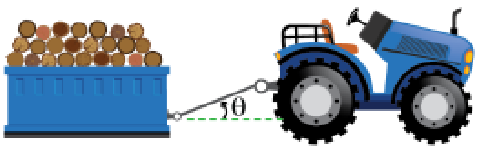
$$K=۵۱۲J\rightarrow\frac{۱}{۲}mv^۲=۵۱۲J\rightarrow\frac{۱}{۲}\times۴v^۲=۵۱۲\rightarrow v=۱۶\frac{m}{s}$$

با توجه به این‌که تندی در هر ثانیه $۳\frac{m}{s}$ زیاد می‌شود و تندی در $t=۱s$ برابر $۴\frac{m}{s}$ است، می‌توان فهمید که ۴ ثانیه بعد، یعنی در لحظهٔ $t=۵s$، تندی به $۱۶\frac{m}{s}$ می‌رسد.

$$\begin{cases}t=۱s\\ v=۴\frac{m}{s}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}t=۲s\\ v=۷\frac{m}{s}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}t=۳s\\ v=۱۰\frac{m}{s}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}t=۴s\\ v=۱۳\frac{m}{s}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}t=۵s\\ v=۱۶\frac{m}{s}\end{cases}$$

دقت کنید برای سادگی می‌توانستیم از رابطهٔ $v=at+v_۰$ هم کمک بگیریم.

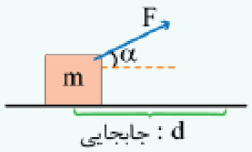
۳۶ **در شکل مقابل، تراکتور با نیروی ثابت $۰/۰۱\text{MN}$، تحت زاویهٔ $\theta = ۳۷^\circ$، سورتمه و بار روی آن به جرم کل ۰/۵ تن را می‌کشد و نیروی اصطکاک وارد بر سورتمه برابر $۲/۵\text{kN}$ است. در مدتی که تراکتور سورتمه را ۱۲m روی سطح افقی می‌کشد، کار نیروی تراکتور و کار نیروی اصطکاک روی سورتمه و بار روی آن به ترتیب از راست به چپ چند کیلوژول است؟ $(\cos ۳۷^\circ = ۰/۸)$**



۱) ۱۲۰، ۳۰
۲) ۱۲۰، ۳۰-
۳) ۹۶، ۳۰
۴) ۹۶، ۳۰-

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

محاسبهٔ کار



۱) هنگامی که مطابق شکل مقابل، نیروی F به یک جسم وارد شود و آن را به اندازهٔ d جابه‌جا کند، کار نیروی F برابر است با:

$$W = F.d\cos\alpha$$

در رابطهٔ فوق، F نیروی وارد بر جسم، d جابه‌جایی آن و α زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی است.

۲) مطابق رابطهٔ $W = F.d\cos\alpha$، هر ژول معادل (متر×نیوتون) است.

۳) با توجه به زاویهٔ α، کار انجام شده می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

$$۰ \le \alpha < ۹۰^\circ \to \cos\alpha > ۰ \to W > ۰$$

$$\alpha = ۹۰^\circ \to \cos\alpha = ۰ \to W = ۰$$

$$۹۰^\circ < \alpha \le ۱۸۰^\circ \to \cos\alpha < ۰ \to W < ۰$$

۴) اگر بردار نیروی وارد بر جسم به صورت $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ باشد، در صورتی که جسم در راستای محور x جابه‌جا شود، نیروی F_y بر جابه‌جایی عمود است و کار آن صفر خواهد بود و در نتیجه فقط نیروی F_x در محاسبهٔ نیرو اهمیت خواهد داشت.

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} \\ d\text{:جابه‌جایی در جهت محور } x \end{cases} \to W = F_x d$$

به همین ترتیب اگر جسم در راستای محور y جابه‌جا شود، F_x کاری انجام نمی‌دهد و فقط F_y اهمیت خواهد داشت.

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} \\ d: \text{جابه‌جایی در جهت محور } y \end{cases} \rightarrow W = F_y d$$

مثال:

نیروی $\vec{F} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j}$ برحسب واحدهای SI به جسمی به جرم ۲kg وارد می‌شود. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر جسم ۱۰ متر در جهت محور x جابه‌جا شود، کار نیروی F چند ژول است؟ $W = F_x d = ۲\times۱۰ = ۲۰J$

ب) اگر جسم ۱۰ متر در جهت محور y جابه‌جا شود، کار نیروی F چند ژول است؟ $W = F_y d = ۳\times۱۰ = ۳۰J$

ج) اگر جسم ۱۰ متر در جهت نیروی F جابه‌جا شود، کار نیروی F چند ژول است؟

در این حالت زاویهٔ نیرو و جابه‌جایی صفر است و باید اندازهٔ نیرو را به دست آوریم. $F = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۳}\,N \rightarrow W = Fd = \sqrt{۱۳}\times۱۰ = ۱۰\sqrt{۱۳}\,J$

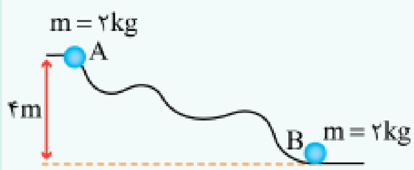
۵) در این قسمت به اختصار کار نیروهایی مثل وزن، اصطکاک و مقاومت هوا را بررسی می‌کنیم.

الف) نیروی وزن: برای محاسبهٔ کار نیروی وزن، کافی است که فقط جابه‌جایی جسم در راستای قائم را در نظر بگیریم. اگر جسم به اندازهٔ h پایین بیاید، کار نیروی وزن برابر $W_{mg} = mgh$ است و اگر به اندازهٔ h بالا برود، کار نیروی وزن برابر $W_{mg} = -mgh$ خواهد بود.

$W = +\,mgh$ $\qquad$ $W = -\,mgh$

مثال:

کار نیروی وزن در جابه‌جایی جسم از A تا B چند ژول است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$



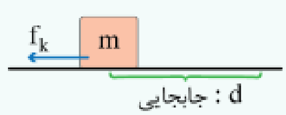
جسم به اندازهٔ ۴ متر پایین آمده است، بنابراین داریم:

$W = +mgh = +۲\times۱۰\times۴ = ۸۰J$

تذکر: کار نیروی وزن به مسیر جابه‌جایی جسم وابسته نیست و فقط به این‌که جسم چقدر بالا یا پایین رفته است، ربط دارد.

ب) کار نیروی اصطکاک جنبشی:

با توجه به این‌که نیروی اصطکاک جنبشی در خلاف جهت حرکت جسم است، $\cos\alpha = -۱$ خواهد بود و در نتیجه کار آن منفی می‌باشد.



$$W_{f_k} = f_k d \underbrace{\cos ۱۸۰^\circ}_{-۱} \rightarrow W_{f_k} = -f_k d$$

در صورتی که نیاز به محاسبهٔ نیروی اصطکاک باشد، می‌توانیم از رابطهٔ $f_k = \mu_k F_N$ که در کتاب دوازدهم آمده است استفاده کنیم.

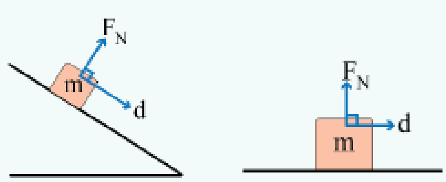
ج) نیروی مقاومت هوا:

نیروی مقاومت هوا هم مانند اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم است، بنابراین کار آن منفی خواهد بود. اگر این نیرو را با f_D نشان دهیم، داریم:

$W_{f_D} = -f_D d$

د) کار نیروی عمودی سطح:

در بیشتر مسائل که جسم روی یک سطح صاف یا شیبدار حرکت می‌کند، نیروی عمودی سطح بر جابه‌جایی جسم عمود است و در نتیجه کار این نیرو برابر صفر خواهد بود.



در برخی از مسائل مثل حرکت آسانسور، کار نیروی عمودی سطح صفر نیست. هنگامی که آسانسور به سمت بالا حرکت کند، نیروی عمودی سطح هم‌جهت با جابه‌جایی است و کار آن مثبت می‌باشد و اگر آسانسور پایین برود، کار نیروی عمودی سطح منفی خواهد بود.

$W_N = \pm F_N d$

+ ← آسانسور بالا برود. $\qquad$ - ← آسانسور پایین برود.

پاسخ تشریحی:

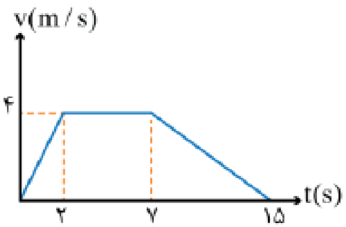
کار نیروی تراکتور برابر است با:

$$W = Fd\cos\theta = 0/01\times10^{6}\times12\times\underbrace{\cos37^\circ}_{0/8} = 9/6\times10^{4}J = 96kJ$$

کار نیروی اصطکاک برابر است با:

$$W_{f_k} = -f_k d = -2/5\times10^{3}\times12 = -3\times10^{4}J = -30kJ$$

۳۷ **جسمی به جرم $20kg$ کف آسانسوری قرار دارد. آسانسور به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند و نمودار سرعت - زمان حرکت آن مطابق شکل است. چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$**



الف: کار نیروی وزن روی جسم در کل حرکت برابر $-8kJ$ است.

ب: کار نیرویی که کف آسانسور بر جسم وارد می‌کند، در کل حرکت برابر $8kJ$ است.

ج: کار کل انجام شده روی جسم در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت صفر است.

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴　　(متوسط ـ نموداری ـ ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

ابتدا به کمک مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، جابه‌جایی آسانسور به سمت بالا را بدست می‌آوریم.

$$d = \frac{5+15}{2}\times4 = 40m$$

کار نیروی وزن برابر است با:

$$W_{\text{وزن}} = -mgd = -20\times10\times40 = -8000J = -8kJ$$

با توجه به آن‌که تندی اولیه و نهایی جسم برابر است، طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار کل انجام شده روی جسم صفر است و در نتیجه کار نیروی کف آسانسور قرینهٔ کار وزن است.

$$W_N = -W_{\text{وزن}} = -(-8kJ) = +8kJ$$

همچنین دقت کنید که در ۲ ثانیهٔ سوم، تندی جسم ثابت است و در نتیجه کار کل انجام شده روی آن صفر است.

مطابق توضیحات فوق، هر سه عبارت صحیح هستند.

اگر...

اگر کار نیروی کف آسانسور بر جسم را در ۲ ثانیهٔ اول حرکت می‌خواستیم پاسخ چه بود؟

پاسخ: جابه‌جایی آسانسور در ۲ ثانیهٔ اول برابر مساحت زیر نمودار سرعت - زمان است.

$$d = \frac{2\times4}{2} = 4m$$

با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_{\text{کل}} = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \rightarrow W_{\text{وزن}} + W_N = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\rightarrow -mgd + W_N = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \rightarrow (-20\times10\times4) + W_N = 10(4^2 - 0)$$

$$\rightarrow W_N = 960N$$

۳۸ **جسمی به جرم $2kg$ را از بالنی که در ارتفاع ۱۰ متری سطح زمین با تندی $10\frac{m}{s}$ به سمت بالا در حرکت است، رها می‌کنیم. اگر تا لحظهٔ رسیدن جسم به سطح زمین، ۷۵ درصد از انرژی جنبشی اولیه به انرژی درونی تبدیل شود، تندی جسم در لحظه رسیدن به سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$**

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

انرژی مکانیکی در حضور نیروهای اتلافی

همان‌طور که می‌دانیم، در صورتی که نیروهای غیرپایستار مانند نیروی مقاومت هوا و اصطکاک در مسأله وجود نداشته باشند، انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند. در این درسنامه می‌خواهیم ببینیم در حضور این نیروها، انرژی مکانیکی چگونه تغییر خواهد کرد. به نکات زیر توجه کنید.

۱) کار نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا منفی است. این کار باعث کاهش یافتن انرژی مکانیکی جسم می‌شود. به عبارت دیگر: $E_2 - E_1 = W_f$

با توجه به این‌که علامت کار منفی است، E_2 کوچک‌تر از E_1 می‌باشد.

۲) انرژی مکانیکی که جسم از دست می‌دهد، صرف افزایش انرژی درونی محیط و جسم می‌شود. به عبارت دیگر تغییرات انرژی درونی محیط و جسم برابر $E_1 - E_2$ خواهد بود.

مثال:

جسمی به جرم $20kg$ از ارتفاع ۱۲۰۰ متری از سطح زمین بدون سرعت اولیه رها می‌شود تا سقوط کند. اگر تا لحظهٔ رسیدن جسم به زمین، انرژی درونی محیط و جسم در مجموع $236kJ$ افزایش یابد، تندی جسم هنگام برخورد به زمین چند کیلومتر بر ساعت است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$

مطابق نکات فوق، اختلاف انرژی مکانیکی اولیه و نهایی جسم برابر افزایش انرژی درونی محیط و جسم است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{افزایش انرژی درونی} = E_1 - E_2$$
$$= U_1 + K_1 - (U_2 + K_2)$$
$$\rightarrow 236\times10^3 = mgh_1 - \frac{1}{2}mv_2^2$$
$$\rightarrow 236\times10^3 = (20\times10\times1200) - \frac{1}{2}\times20\times v_2^2$$
$$\rightarrow 236\times10^3 = 240\times10^3 - 10v_2^2$$
$$\rightarrow v_2^2 = 400 \rightarrow v_2 = 20\frac{m}{s} = 72\frac{km}{h}$$

پاسخ تشریحی:

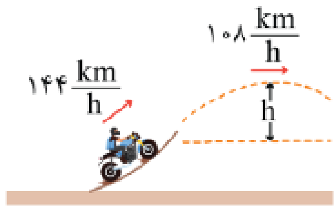
انرژی مکانیکی اولیهٔ جسم برابر است با:

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\times2\times10^2 = 100J \\ U_1 = mgh = 2\times10\times10 = 200J \end{cases} \rightarrow E_1 = U_1 + K_1 = 300J$$

۷۵ درصد انرژی جنبشی اولیه، یعنی $75J$ از انرژی مکانیکی جسم به انرژی درونی تبدیل می‌شود، بنابراین انرژی مکانیکی نهایی جسم برابر $E_2 = E_1 - 75 = 225J$ خواهد بود و در نتیجه تندی جسم هنگام رسیدن به زمین برابر می‌شود با:

$$K_2 = 225J\ ,\ K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow 225 = \frac{1}{2}\times2\times v^2 \rightarrow v = 15\frac{m}{s}$$

۳۹ **در شکل مقابل، موتورسواری با تندی $144\frac{km}{h}$ از انتهای سکویی می‌پرد و تندی حرکت آن در بالاترین نقطهٔ مسیرش به $108\frac{km}{h}$ می‌رسد. ارتفاع h چند متر است؟ ($g=10\frac{N}{kg}$، مقاومت هوا ناچیز است.)**



۱) ۳۵
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

بین محل پرش و بالاترین نقطهٔ مسیر از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم:

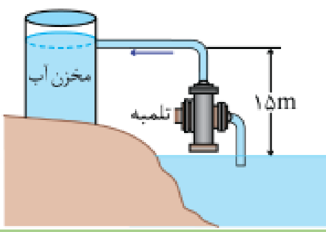
$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\times(40)^2 = (10\times h) + \frac{1}{2}\times 30^2$$

$$\rightarrow 800 = 10h + 450 \rightarrow h = 35m$$

دقت کنید که در روابط فوق، تندی‌ها باید برحسب $\frac{m}{s}$ جایگذاری شوند. $v_2 = 108\frac{km}{h} = 30\frac{m}{s}$ ، $v_1 = 144\frac{km}{h} = 40\frac{m}{s}$

۴۰ **در شکل مقابل، تلمبه با توان ورودی 2kW در هر دقیقه ۳۰۰ لیتر از آب دریاچه را به ارتفاع ۱۵ متری می‌برد و با تندی $10\frac{m}{s}$ درون مخزن آب می‌ریزد. اگر چگالی آب دریاچه $1/02\frac{g}{cm^3}$ باشد، بازده این تلمبه چند است؟ ($g=10\frac{N}{kg}$)**



۱) ۴۹
۲) ۵۱
۳) ۴۸
۴) ۵۲

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

توان و بازده

۱) توان یک دستگاه برابر کاری است که آن دستگاه در واحد زمان انجام می‌دهد.

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

با توجه به نوع دستگاه، این کار می‌تواند صرف افزایش انرژی پتانسیل گرانشی جسم (مثلاً بالابر) شود یا می‌تواند صرف افزایش انرژی جنبشی جسم (مثلاً موتور خودرو) شود.

۲) ماشین‌ها معمولاً بخشی از انرژی ورودی به خود را تلف می‌کنند و فقط بخشی از انرژی ورودی به کار موردنظر ما تبدیل می‌شود. نسبت کار مفیدی که دستگاه انجام می‌دهد به کار کل (انرژی ورودی) آن برابر بازده دستگاه است.

$$\text{بازده}: Ra = \frac{\text{کار مفید}}{\text{کار کل}} \times \underbrace{100}_{\text{تبدیل به درصد}}$$

$$\text{بازده}: Ra = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}} \times \underbrace{100}_{\text{تبدیل به درصد}}$$

مثال:

پمپ آبی با توان $10\,kW$ در هر ساعت، ۱۲۰۰۰۰ لیتر آب با چگالی $1\frac{gr}{cm^3}$ را به اندازهٔ ۸ متر بالا می‌برد. بازده این پمپ چقدر است؟ $(g = 10\frac{N}{kg})$

$$P_{\text{مفید}} = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{120000 \times 10 \times 8}{3600} = \frac{8000}{3} W$$

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{اسمی}}} = \frac{\frac{8000}{3}}{10000} = \frac{4}{15} = 26/6\%$$

گام اول:

توان خروجی تلمبه برابر است با:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{mgh + \frac{1}{2}mv^2}{\Delta t} = \frac{(\rho V)gh + \frac{1}{2}(\rho V)v^2}{\Delta t}$$

$$\rightarrow P_{\text{خروجی}} = \frac{(1020 \times 0/3 \times 10 \times 15) + (\frac{1}{2} \times 1020 \times 0/3 \times 10^2)}{60} = 1020 W$$

گام دوم:

بازدهٔ تلمبه برابر است با:

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 = \frac{1020}{2000} \times 100 = 51\%$$

۴۱ ۴ فرمول مولکولی ۲- هپتانون به صورت $C_۷H_{۱۴}O$ است.

$$\underset{(۲۵^\circ C)}{\text{ارزش سوختی}} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن}|}{\text{جرم مولی}} = \frac{۴۴۳۸ kJ.mol^{-۱}}{۱۱۴ g.mol^{-۱}} \simeq ۳۸/۹ kJ.g^{-۱}$$

بر اثر سوختن کامل هر مول ۲- هپتانون، ۷ مول $H_۲O$ تولید می‌شود.

تفاوت آنتالپی سوختن ۲- هپتانون در دماهای $۲۵^\circ C$ و $۱۰۰^\circ C$ مربوط به آنتالپی تبخیر ۷ مول آب است:

$$(-۴۱۳۰) - (-۴۴۳۸) = ۳۰۸ kJ$$

$$?kJ = ۱g\ H_۲O \times \frac{۱ mol\ H_۲O}{۱۸ g\ H_۲O} \times \frac{۳۰۸ kJ}{۷ mol\ H_۲O} = ۲/۴۴ kJ$$

۴۲ ۲ عبارت‌های اول و دوم درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

- سطح انرژی و پایداری دو ترکیبی که با هم ایزومرند، **متفاوت** است.
- واکنش تبدیل گرافیت به الماس، **برخلاف** واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، یک واکنش گرماگیر است.

۳ معادلهٔ واکنش هدف:

$$N_2O_5(s) + N_2O_3(g) \rightarrow 2N_2O_4(g)$$

معادلهٔ واکنش‌های کمکی:

$$a)\ N_2O_5(g) \rightarrow NO(g) + NO_2(g) + O_2(g)\ ,\ \Delta H = +112kJ$$

$$b)\ NO(g) + NO_2(g) \rightarrow N_2O_3(g)\ ,\ \Delta H = -40kJ$$

$$c)\ N_2O_4(g) \rightarrow 2NO_2(g)\ ,\ \Delta H = +57kJ$$

$$d)\ 2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)\ ,\ \Delta H = -114kJ$$

$$e)\ N_2O_5(g) \rightarrow N_2O_5(s)\ ,\ \Delta H = -54kJ$$

برای رسیدن به واکنش هدف، باید تغییرات زیر را بر روی واکنش‌های کمکی اعمال کنیم:

- واکنش e را وارونه کنیم.
- واکنش b را وارونه کنیم.
- واکنش c را وارونه و ضرایب آن را در عدد ۲ ضرب کنیم.
- واکنش‌های a و d نیز بدون تغییر باقی می‌مانند.

$$\Delta H(\text{هدف}) = -\Delta H_e - \Delta H_b - 2\Delta H_c + \Delta H_a + \Delta H_d$$

$$= +54 + 40 - 2(+57) + 112 + (-114) = -22kJ$$

۴۴ ۱

$$CH_۴(g)+\frac{۱}{۲}O_۲(g)\rightarrow CH_۳OH(g)$$

$$\Delta H=\left[\begin{array}{c}\text{مجموع آنتالپی پیوندهای}\\ \text{واکنش دهنده‌ها}\end{array}\right]-\left[\begin{array}{c}\text{مجموع آنتالپی پیوندهای}\\ \text{فراورده}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow -۱۶۲/۵=\left[\underset{\Delta H(C-H)}{\cancel{۴\Delta H(C-H)}}+\frac{۱}{۲}\Delta H(O=O)\right]$$

$$-[\cancel{۳\Delta H(C-H)}+\Delta H(O-H)+\Delta H(C-O)]$$

$$\Rightarrow -۱۶۲/۵=\Delta H(C-H)-\Delta H(C-O)+\frac{۱}{۲}(۴۹۵)-۴۶۵$$

$$\Rightarrow \Delta H(C-H)-\Delta H(C-O)=-۲۴۷/۵+۴۶۵-۱۶۲/۵=۵۵kJ$$

۴۵ ۱ **بررسی عبارت‌های نادرست:**

پ) هر مولکول بنزآلدهید $(C_۷H_۶O)$ شامل ۷ اتم کربن و ۶ اتم هیدروژن است.

ت) طعم و بوی گشنیز به طور عمده وابسته به یک ترکیب آلی دارای **گروه هیدروکسیل** است.

۴۶ ۲ معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش موردنظر به صورت زیر است:

$$۲Al(s) + ۳CuSO_۴(aq) \rightarrow Al_۲(SO_۴)_۳(aq) + ۳Cu(s)$$

با مصرف ۲ مول Al یعنی ۵۴ گرم آلومینیم، ۳ مول فلز Cu یعنی ۱۹۲ گرم مس، تولید شده و جرم تیغه با فرض این‌که تمام مس تولیدشده بر سطح تیغهٔ آلومینیمی رسوب کند، ۱۳۸ گرم افزایش می‌یابد. اگر مطابق داده‌ها فقط ٪۷۵ از Cu بر سطح تیغه رسوب کند، افزایش جرم تیغه برابر است با:

$$(۳\times۶۴\times\frac{۷۵}{۱۰۰})-(۲\times۲۷)=۹۰g$$

اکنون می‌توان از یک تناسب ساده استفاده کرد:

$$\begin{bmatrix} \text{مول مس تولیدشده} & \text{افزایش جرم تیغه(g)} \\ ۳ & ۹۰ \\ x & \frac{۲۵}{۱۰۰}\times۱۲۰ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۱mol\,Cu$$

$$\overline{R}_{Cu} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{۱mol}{\frac{۹۰}{۶۰}h} = ۰/۶۷\,mol.h^{-۱}$$

۴۷ ۴

$$CS_۲ + ۳O_۲ \rightarrow CO_۲ + ۲SO_۲$$

واضح است که A و B به ترتیب واکنش‌دهنده و فراورده هستند. ازآن‌جا که تغییرات مول A در ۱۵ ثانیه برابر با ۹/۹ و برای B در همین‌مدت برابر با ۶/۶ مول است، می‌توان نتیجه گرفت که ضریب A باید ۱/۵ برابر B باشد و در نتیجه A و B به ترتیب $O_۲$ و $SO_۲$ هستند.

$$\begin{array}{llll} CS_۲ + & ۳O_۲ & \rightarrow CO_۲ + & ۲SO_۲ \\ A-x & ۱۵-۳x & x & ۲x \end{array}$$

ثانیهٔ ۱۰اُم : $(x+۲x)=(۱۵-۳x) \Rightarrow x=۲/۵mol$

۵ ثانیهٔ دوم : $\overline{R}_{O_۲} = ۳\overline{R}_{\text{واکنش}} \Rightarrow \overline{R}_{O_۲} = ۳(۱۲) = ۳۶mol.min^{-۱}$

$$\Rightarrow \frac{m-n}{\frac{۵}{۶۰}} = ۳۶ \Rightarrow m-n = ۳$$

$$\overline{R}_{SO_۲} = ۲\overline{R}_{\text{واکنش}} \Rightarrow ۲(۱۲) = \frac{b-a}{\frac{۵}{۶۰}} \Rightarrow b-a = ۲$$

۴۸ ۱

- با افزایش دما سرعت تمامی واکنش‌ها (چه گرماده، چه گرماگیر) افزایش می‌یابد.
- افزودن مقداری آب مقطر به واکنش‌دهنده، موجب کاهش غلظت آن شده و سرعت تجزیهٔ آن را کم می‌کند.
- افزایش فشار تنها بر روی سرعت واکنش‌هایی مؤثر است که حداقل شامل یک واکنش‌دهندهٔ گازی‌شکل باشد.
- کاتالیزگر این واکنش محلول KI است.

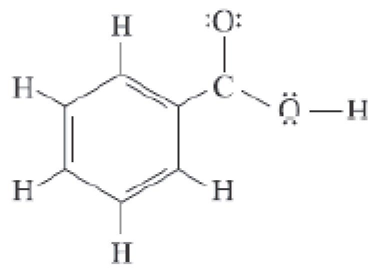
۴۹ ۱ فقط عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

• تفاوت جرم مولی بنزوئیک اسید $(C_7H_6O_2)$ با آشناترین اسید آلی یعنی استیک اسید $(C_2H_4O_2)$ برابر با جرم مولی C_5H_2 یعنی ۶۲ گرم است.

• بنزوئیک اسید نوعی **نگهدارنده** است.

• نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی مولکول بنزوئیک اسید برابر با $۴/۷۵ = \frac{۱۹}{۴}$ است.



۵۰ ۲ عبارت‌های اول و دوم درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

• در بدن ما به دلیل انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده، رادیکال‌ها به وجود می‌آیند. مصرف مواد خوراکی حاوی لیکوپن، **فعالیت** رادیکال‌ها را کاهش می‌دهد.

• تمام شاخه‌های لیکوپن از نوع **متیل** هستند.